МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

О РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ УПРОЩЕННОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННОЙ С ЗАДАЧЕЙ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ

А.Т. Сазонова

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

ON SOLUTIONS OF SIMPLIFIED SYSTEMS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS RELATED TO THE PROBLEM OF FOUR BODIES

A.T. Sazonava

Y. Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus

В основной части рассматривается система, описывающая движение четырех тел под действием сил гравитации. С помощью элементарных алгебраических преобразований установлена упрощенная система, состоящая из нелинейных дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет второй порядок. Получено 21 нелинейное автономное дифференциальное уравнение первого порядка относительно одной из компонент системы, общее решение которого обладает свойством Пенлеве. Установлены необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у исследуемой системы.

Ключевые слова: *движение четырех тел, константа взаимодействия, свойство Пенлеве, мероморфное решение.*

In the main part we consider a system describing the motion of four bodies under the action of gravity. Using the set of elementary algebraic transformations, a simplified system consisting of nonlinear differential equations, each of which has the second order was developed. 21 autonomous nonlinear differential equation of the first order with respect to one of the components of the system, whose general solution has the Painlevé property were obtained. Necessary and sufficient conditions for Painlevé properties in the studied system were established.

Keywords: *movement of four bodies, constant interaction Painlevé property, meromorphic solution.*

Введение

Одной из важнейших задач аналитической теории дифференциальных уравнений является задача выделения классов уравнений и систем, решения которых имеют те или иные свойства, в особенности уравнений типа Пенлеве.

Весьма большое число различных задач механики, математической физики, инженерных наук и различных других областей знания приводится к интегрированию дифференциальных уравнений. Математические трудности, которые встречаются при интегрировании этих уравнений, часто задерживают решение прикладных задач. Примером может служить знаменитая задача о движении тел под действием сил гравитации, невозможность полного разрешения которой обуславливается отсутствием методов интеграции уравнений такого типа, какие встречаются в этой задаче, и возможностью до конца исследовать их решения.

Решение задачи о движении одного тела содержится уже в первом законе Ньютона – законе инерции.

Решение задачи двух тел также было получено Ньютоном. Опираясь на законы Кеплера движения планет и некоторые другие результаты своих предшественников, Ньютон открыл закон всемирного тяготения, то есть по заданному движению планеты была найдена сила ее взаимодействия с Солнцем.

В отличие от задачи двух тел задача трех тел не допускает общего решения, позволяющего для произвольных значений координат и скоростей тел в начальный момент времени $t = 0$ предсказать положение каждого из трех тел для любого будущего момента времени $t > 0$. И это несмотря на то, что ввиду своей важности задача трех тел привлекала к себе внимание многих математиков и механиков, среди которых были выдающиеся. Крупнейшие математики Ж. Лагранж, К. Якоби, А. Пуанкаре, Дж. Биркгоф и др. затратили на эту задачу много лет упорного труда, выдав поток блестящих идей и получив много ценных методов и результатов, но построить общее решение так и не удалось.

В работе Силушик Агнешки «Проблема устойчивости по Ляпунову стационарных решений некоторых гамильтоновых систем космической динамики» были получены и обоснованы необходимые и достаточные условия существования точек относительного равновесия гамильтоновой системы дифференциальных уравнений шестого порядка, описывающей ограниченную проблему 8-и тел с неполной симметрией, определено множество начальных условий, порождающих такие стационарные решения.

Объектом исследования предложенной работы является система трех нелинейных дифференциальных уравнений, которая является математической моделью движение четырех тел под действием сил гравитации.

1 Разрешимые случаи в задаче четырех тел

В последнее время значительный интерес представляет исследование следующей системы, состоящей из N обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varsigma_n'' = 2\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{m=N} a_{nm}\frac{\varsigma_n'\varsigma_m'}{\varsigma_n-\varsigma_m},\ n=1,...,N. \qquad (1.1)$$

Зависимые переменные $\varsigma_n=\varsigma_n(\tau)$ являются комплексными. Константы взаимодействия a_{nm} априори произвольны, за исключением требования симметрии

$$a_{nm}=a_{mn}.$$

Интерес к системе также вызывает тот факт, что при отождествлении комплексной ς-плоскости с физической плоскостью и при ограничении на вещественное τ (интерпретируемое как «физическое время») движение N точек ς_n соответствует решению задачи многих тел в плоскости, характеризуемой ньютоновскими уравнениями движения с интересным свойством: среди решений задачи многих тел имеются много решений с полностью периодическими траекториями.

Несмотря на кажущуюся простоту формул, аналитического решения данной задачи в общем виде для $N>3$ пока не найдено.

В данной работе рассматривается задача о двиении четырех тел.

Из (1.1) видно, что центр масс $Z\equiv Z(\tau)$,

$$Z=\frac{\varsigma_1+\varsigma_2+\varsigma_3+\varsigma_4}{4},$$

движется равномерно:

$$Z''=0,$$

$$Z(\tau)=Z(0)+Z'(0)\tau=Z(0)+V\tau.$$

Положим

$$a_{12}=a_{21}=a, a_{13}=a_{31}=c, a_{14}=a_{41}=d,$$

$$a_{23}=a_{32}=b, a_{24}=a_{42}=e, a_{34}=a_{43}=f.$$

Существует также интеграл движения (что непосредственно следует из (1.1) [1]):

$$K=\varsigma_1'\varsigma_2'\varsigma_3'\varsigma_4'(\varsigma_1-\varsigma_2)^{2a}(\varsigma_2-\varsigma_3)^{2b}\times$$
$$\times(\varsigma_3-\varsigma_1)^{2c}(\varsigma_4-\varsigma_1)^{2d}(\varsigma_2-\varsigma_4)^{2e}(\varsigma_3-\varsigma_4)^{2f}.$$

Введем координаты относительно центра масс

$$u_n=\varsigma_n-Z, n=1,2,3,4,$$

чтобы выполнялось

$$u_1+u_2+u_3+u_4=0.$$

Для удобства обозначений положим

$$u_1=x, u_2=y, u_3=z, u_4=-x-y-z.$$

С помощью несложных алгебраических преобразований можно теперь записать уравнения движения и интеграл движения в терминах переменных x, y, z:

$$\begin{cases} \ddot{x}=2a\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y}+2c\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z}-\\ \quad -2d\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}+V)}{2x+y+z},\\ \ddot{y}=-2a\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y}+2b\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z}-\\ \quad -2e\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}+V)}{x+2y+z},\\ \ddot{z}=-2c\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z}-2b\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z}-\\ \quad -2f\dfrac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}+V)}{x+y+2z}, \end{cases} \qquad (1.2)$$

$$K=(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)\times$$
$$\times(x-y)^{2a}(y-z)^{2b}(z-x)^{2c}\times$$
$$\times(2x+y+z)^{2d}(x+2y+z)^{2e}(x+y+2z)^{2f},$$

где $x=x(\tau)$, $y=y(\tau)$, $z=z(\tau)$, $\tau=t-t_0$, $V=Z'(0)$, $K=const$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \ddot{x}=2a\dfrac{\dot{x}\dot{y}}{x-y}-2d\dfrac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{y})}{2x+y},\\ \ddot{y}=-2a\dfrac{\dot{x}\dot{y}}{x-y}-2e\dfrac{\dot{y}(\dot{x}+\dot{y})}{x+2y},\\ \ddot{z}=-2c\dfrac{\dot{x}(\dot{z}+V)}{x}-2b\dfrac{\dot{y}(\dot{z}+V)}{y}-\\ \quad -2f\dfrac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y})}{x+y}, \end{cases} \qquad (1.3)$$

которая является инвариантной при замене переменных $(\tau,x,y,z;\varepsilon\tau,x,y,\varepsilon z)$, ε − параметр, а значит, является упрощенной для (1.2).

Согласно [1] справедлива

***Лемма* 1.1.** *Для того, чтобы все решения* (1.1) *являлись мероморфными функциями от* τ, *необходимо, чтобы все показатели* γ_n,β_n,Γ, $n=\overline{1,6}$, *определяемые через константы* a,b,c,d,e,f *с помощью соотношений*

$$\gamma_n=\frac{1}{1+a_n},$$

$$\beta_n=-2a_n,$$

$$\Gamma=\frac{2}{2+a+b+c+d+e+f},$$

$$a_n\in\{a,b,c,d,e,f\},$$

принимали целочисленные или бесконечные значения.

Рассмотрим первое и второе уравнения системы (1.3)

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a\dfrac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2d\dfrac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{y})}{2x+y}, \\ \ddot{y} = -2a\dfrac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2e\dfrac{\dot{y}(\dot{x}+\dot{y})}{x+2y}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Из [2] имеем

***Лемма* 1.2.** *Для наличия у* (1.4) *свойства Пенлеве необходимо*

1) $a = d = -\dfrac{1}{2}, e = 0,$

2) $a = -\dfrac{1}{2}, d = 0, e = -1,$

3) $a = e = -\dfrac{1}{2}, d = 0.$

Рассмотрим каждый из случаев леммы 1.2.

Пусть $a = d = -\dfrac{1}{2}, e = 0.$ Тогда система (1.4) примет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - + \dfrac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{y})}{2x+y}, \\ \ddot{y} = \dfrac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} \end{cases} \quad (1.5)$$

и соответствующий интеграл движения

$$K = \frac{\dot{x}\dot{y}(\dot{x}+\dot{y})}{(x-y)(2x+y)}.$$

Легко проверить, что общее решение (1.5) имеет вид

$$x = -\frac{K}{3}\tau^3 + M_1\tau^2 + M_2\tau + M_3,$$

$$y = \frac{K}{6}\tau^3 + L_1\tau^2 + L_3,$$

где L_1, L_3 − произвольные постоянные, а M_1, M_2, M_3 определяются из соотношений

$$M_1 = \frac{3L_3K^2}{8L_1^2} - L_1,$$

$$M_2 = \frac{3L_3K}{2L_1},$$

$$M_3 = L_3.$$

Интегрируя третье уравнение системы (1.3), получим первый интеграл

$$\dot{z} = Ax^{-2c}y^{-2b}(x+y)^{-2f} - V, \quad (1.6)$$

где A − произвольная постоянная.

С учетом условия леммы 1.1, а также первого условия леммы 1.2 положим, что $a = d = -\dfrac{1}{2}, e = 0,$ а константы c, b, f принимают одно из значений, приведенных в таблице 1.1.

Для каждого из 20 наборов значений констант взаимодействия c, b, f в соответствии с (1.6) можно найти общее решение системы (1.3).

Таблица 1.1. – Значения констант c, b, f

c	b	f
–1	–1	–1
0	–1	–1
–1	0	–1
–1	–1	0
0	0	–1
0	–1	0
–1	0	0
–0,5	0	0
0	–0,5	0
0	0	–0,5
–0,5	–0,5	0
–0,5	0	–0,5
0	–0,5	–0,5
–0,5	–0,5	–0,5
–1,5	0	0
0	–1,5	0
0	0	–1,5
–1,5	–1,5	0
–1,5	0	–1,5
0	–1,5	–1,5

Ниже приведенные функции $F_k(\tau), k = \overline{1,20},$ являются полиномами по τ:

1) $c = b = f = -1,\ \dot{z} = Ax^2y^2(x+y)^2 - V,$
$z = F_1(\tau), \deg F_1(\tau) = 19;$

2) $c = 0, b = f = -1,\ \dot{z} = Ay^2(x+y)^2 - V,$
$z = F_2(\tau), \deg F_2(\tau) = 13;$

3) $b = 0, c = f = -1,\ \dot{z} = Ax^2(x+y)^2 - V,$
$z = F_3(\tau), \deg F_3(\tau) = 13;$

4) $c = b = -1, f = 0,\ \dot{z} = Ax^2y^2 - V,$
$z = F_4(\tau), \deg F_4(\tau) = 13;$

5) $c = b = 0, f = -1,\ \dot{z} = A(x+y)^2 - V,$
$z = F_5(\tau), \deg F_5(\tau) = 7;$

6) $c = f = 0, b = -1,\ \dot{z} = Ay^2 - V,$
$z = F_6(\tau), \deg F_6(\tau) = 7;$

7) $c = -1, b = f = 0,\ \dot{z} = Ax^2 - V,$
$z = F_7(\tau), \deg F_7(\tau) = 7;$

8) $c = -\dfrac{1}{2}, b = f = 0,\ \dot{z} = Ax - V,$
$z = F_8(\tau), \deg F_8(\tau) = 4;$

9) $b = -\dfrac{1}{2}, c = f = 0,\ \dot{z} = Ay - V,$
$z = F_9(\tau), \deg F_9(\tau) = 4;$

10) $c = b = 0, f = -\dfrac{1}{2},\ \dot{z} = A(x+y) - V,$
$z = F_{10}(\tau), \deg F_{10}(\tau) = 4;$

11) $c = b = -\dfrac{1}{2}, f = 0,\ \dot{z} = Axy - V,$
$z = F_{11}(\tau), \deg F_{11}(\tau) = 7;$

12) $b = 0, c = f = -\frac{1}{2},\ \ \dot z = Ax(x+y) - V,$

$z = F_{12}(\tau), \deg F_{12}(\tau) = 7;$

13) $c = 0, b = f = -\frac{1}{2},\ \ \dot z = Ay(x+y) - V,$

$z = F_{13}(\tau), \deg F_{13}(\tau) = 7;$

14) $c = b = f = -\frac{1}{2},\ \ \dot z = Axy(x+y) - V,$

$z = F_{14}(\tau), \deg F_{14}(\tau) = 10;$

15) $c = -\frac{3}{2}, b = f = 0,\ \ \dot z = Ax^3 - V,$

$z = F_{15}(\tau), \deg F_{15}(\tau) = 10;$

16) $b = -\frac{3}{2}, c = f = 0,\ \ \dot z = Ay^3 - V,$

$z = F_{16}(\tau), \deg F_{16}(\tau) = 10;$

17) $c = b = 0, f = -\frac{3}{2},\ \ \dot z = A(x+y)^3 - V,$

$z = F_{17}(\tau), \deg F_{17}(\tau) = 10;$

18) $c = b = -\frac{3}{2}, f = 0,\ \ \dot z = Ax^3y^3 - V,$

$z = F_{18}(\tau), \deg F_{18}(\tau) = 19;$

19) $c = f = -\frac{3}{2}, b = 0,\ \ \dot z = Ax^3(x+y)^3 - V,$

$z = F_{19}(\tau), \deg F_{19}(\tau) = 19;$

20) $c = 0, b = f = -\frac{3}{2},\ \ \dot z = Ay^3(x+y)^3 - V,$

$z = F_{20}(\tau), \deg F_{20}(\tau) = 19.$

Пусть теперь $a = -\frac{1}{2}, d = 0, e = -1.$

Систему (1.3) перепишем в виде

$$\begin{cases} \ddot x = -\dfrac{\dot x\dot y}{x-y}, \\ \ddot y = \dfrac{\dot x\dot y}{x-y} + 2\dfrac{\dot x(\dot x+\dot y)}{x+2y} \end{cases} \tag{1.7}$$

и соответствующий первый интеграл

$$\frac{\dot x\dot y(\dot x+\dot y)}{(x-y)(x+2y)^2} = K. \tag{1.8}$$

Логарифмическое дифференцирование первого уравнения системы (1.7) дает

$$\frac{\dddot x}{\ddot x} = 2\frac{\dot x\dot y}{x+2y}.$$

Возводя последнее уравнение в квадрат, с учетом равенства

$$\dot y = -\frac{\dddot x^2}{4K\dot x} - \dot x,$$

получим уравнение вида

$$x^{(IV)} - 2K\dot x = 0. \tag{1.9}$$

***Лемма* 1.3.** *Уравнение* (1.9) *имеет общее решение*

$$x = G_3 + e^{H\tau}(G_2\tau^2 + G_1\tau + G_0),$$

где $H = \sqrt[3]{2K}, G_3, G_2, G_1, G_0, K$ *− произвольные постоянные,* $\tau = t - t_0.$

Таким образом, справедлива

***Лемма* 1.4.** *Система* (1.7) *имеет общее решение*

$$x = G_3 + e^{H\tau}(G_2\tau^2 + G_1\tau + G_0),$$
$$y = G_3 + e^{H\tau}(G_2\tau^2 + G_1\tau + G_0) -$$
$$-\frac{1}{4K}\frac{F_3^2(\tau)F_1(\tau) + 4KF_1^2(\tau)F_2(\tau)}{2KF_2^2(\tau)},$$

где $H = \sqrt[3]{2K}, G_3, G_2, G_1, G_0, K$ *− произвольные постоянные,* $\tau = t - t_0,$

$$F_1(\tau) = e^{H\tau}(HG_2\tau^2 + (HG_1 + 2G_2)\tau +$$
$$+ G_1 + HG_0),$$
$$F_2(\tau) = e^{H\tau}(H^2G_2\tau^2 + (H^2G_1 + 4HG_2)\tau +$$
$$+2HG_1 + H^2G_0 + 2G_2),$$
$$F_3(\tau) = e^{H\tau}(H^3G_2\tau^2 + (H^3G_1 + 6H^2G_2)\tau +$$
$$+3H^2G_1 + H^3G_0 + 6HG_2).$$

С учетом леммы 1.1, леммы 1.2 и уравнения (1.6) положим, что $a = -0{,}5; d = 0, e = -1,$ а константы c, b, f принимают одно из значений таблицы 1.1, а значения $b = c = f = -\frac{3}{2}.$

В соответствии с уравнением (1.4) и таблицей 1.1 были получены 20 обыкновенных дифференциальных уравнений для функции z. В дополнение к выше приведенным, при $b = c = f = -\frac{3}{2}$ будем иметь $\dot z = Ax^3y^3(x+y)^3 - V.$

Если $a = e = -\frac{1}{2}, d = 0,$ то система (1.3) примет вид

$$\begin{cases} \ddot x = -\dfrac{\dot x\dot y}{x-y}, \\ \ddot y = \dfrac{\dot x\dot y}{x-y} + \dfrac{\dot y(\dot x+\dot y)}{x+2y}. \end{cases} \tag{1.10}$$

При этом общее решение системы (1.10) можно записать в виде

$$\begin{aligned} x &= -\frac{K}{6}\tau^3 + C_1\tau^2 + C_2\tau + C_3, \\ y &= \frac{K}{3}\tau^3 + D_1\tau^2 + D_2\tau + D_3, \end{aligned} \tag{1.11}$$

C_1, C_2, C_3 − произвольные постоянные, а D_1, D_2, D_3 находятся из соотношений

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{3K^2C_3 - 2KC_1C_2 - 8C_1^3}{4C_2K + 8C_1^2}, \\ D_2 &= -4\frac{C_1}{K}D_1 - 4\frac{C_1^2}{K}, \\ D_3 &= C_3 - 2\frac{C1C_2}{K}D_1, \tau = t - t_0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

В соответствии с условиями леммы 1.1, а также третьим условием леммы 1.2 получим, что если $a = e = -\dfrac{1}{2}, d = 0,$ а константы c, b, f принимают одно из значений, приведенных в таблице 1.1, то система (1.3) обладает свойством Пенлеве.

Для каждого из наборов значений констант взаимодействия c, b, f таблицы 1.1 можно найти 20 обыкновенных дифференциальных уравнений для функции z, при этом x, y определены соотношениями (1.11) и (1.12).

Из всего вышеизложенного заключаем, что верна следующая теорема.

2 Необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у системы (1.3)

***Теорема* 2.1.** *Для наличия у системы* (1.3) *свойства Пенлеве необходимо и достаточно выполнение одного из условий:*

1) $a = d = -\dfrac{1}{2}, e = 0,$ *константы* c, b, f *приведены в таблице* 1.1;

2) $a = -\dfrac{1}{2}, d = 0, e = -1,$ *константы* c, b, f *приведены в таблице* 1.1, *а также* $b = c = f = -\dfrac{3}{2}$;

3) $a = e = -\dfrac{1}{2}, d = 0,$ *константы* c, b, f *приведены в таблице* 1.1.

Заключение

Для системы (1.2) трех нелинейных дифференциальных уравнений, описывающей движение четырех тел, с помощью замены переменных $(\tau, x, y, z; \varepsilon\tau, x, y, \varepsilon z)$ получена упрощенная система (1.3). Для данной упрощенной системы найдены необходимые условия наличия мероморфных решений, которые приведены в лемме 1.2. Для каждого из необходимых условий получены достаточные, которые включают в себя наборы констант межчастичного взаимодействия из таблицы 1.1.

Во всех трех случаях леммы 1.2 записаны упрощенные системы, а также найдены их общие решения. Для последнего уравнения системы (1.3) в соответствии с наборами констант из таблицы 1.1 для функции z получены простейшие дифференциальные уравнения, общее решение которых можно записать в замкнутом виде.

Показано, что при найденных наборах значений констант межчастичного взаимодействия в задаче четырех тел в плоскости компоненты общего решения системы (1.3) являются полиномами по t.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калоджеро*, *Ф.* Разрешимая задача трех тел и гипотезы Пенлеве / Ф. Калоджеро. − 2-е изд. − Москва : Наука, 2002. − Т. 133: Теоретическая и математическая физика. – 149 с.

2. *Лозовская*, *А.Т.* Тест Пенлеве для некоторых систем дифференциальных уравнений, связанных с задачей трех тел / А.Т. Лозовская // Наука-2009 : сб. ст. аспирантов и магистрантов ГрГУ / ГрГУ им. Я. Купалы ; отв.ред. А.Ф. Проневич. – Гродно : ГрГУ, 2009. − С. 48–52.

Поступила в редакцию 16.09.13.